فصل دوم

آنالیز ترکیبی و احتمال

آنالیز ترکیبی

اصول شمارش

۱- اصل جمع (اصل «یا»)

اگر عمل A را بتوان به m طریق مختلف و عمل B را بتوان به n طریق متفاوت انجام داد، آنگاه A یا B را می توان به m+n طریق انجام داد.

مثال۱: دانشجویی برای رفتن به دانشگاه، می تواند از یکی از سه خط راه آهن A، B و C و یا یکی از خطوط هوایی a یا b استفاده نماید. این دانشجو به چند صورت می تواند وسیله رفتن خود را انتخاب کند؟

پاسخ:

۳+۲=۵

مثال۲: در یک غذاخوری چهار نوع چلو و خورش و پنج نوع خوراک بدون برنج وجود دارد. یک مشتری به چند طریق می تواند غذای خود را انتخاب کند؟

پاسخ: $m+n=٤+٥=٩$

اصول شمارش

۲- اصل ضرب (اصل «و»)

اگر عمل A را بتوان به m طریق مختلف و عمل B را بتوان به n طریق متفاوت انجام داد،
آنگاه A و B را می توان به n×m طریق انجام داد.

نکته: اصول جمع و ضرب برای بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم هستند.

به طور مثال فرض کنید عملی در k مرحله انجام گیرد و مرحله iام به ni طریق ممکن باشد در این صورت عمل مذکور می تواند به $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_{\mathrm{k}}$ انجام یابد.

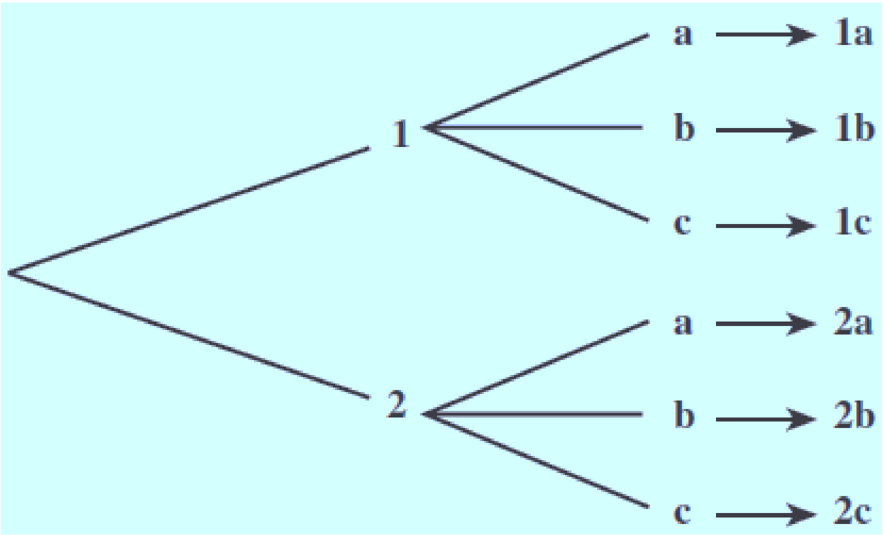
مثال۱: فرض کنید شخصی می خواهد از شهر A به شهر B مسافرت کند و بایستی حتما از شهر B عبور کند. مسافرت از شهر A به شهر B به ٤ طریق ممکن است و مسافرت از شهر B به شهر C به دو طریق ممکن است. به چند طریق این شخص می تواند از شهر A به شهر C مسافرت کند؟

پاسخ: ٤×۲=۸

مثال۲: احمد پنج شلوار و چهار کت دارد. او به چند طریق می تواند کت و شلوار بپوشد؟

پاسخ: از روش درختی برای درک بهتر اصل ضرب می توان استفاده کرد.

در این مثال فرض کنید، $A=\{۱،۲\}$ و $B=\{a ،b ،c\}$ باشد، حاصلضرب $A\times B$ طبق اصل ضرب برابر $۲\times۳=۶$ است و طبق روش درختی این شش عضو به صورت زیر خواهند بود:



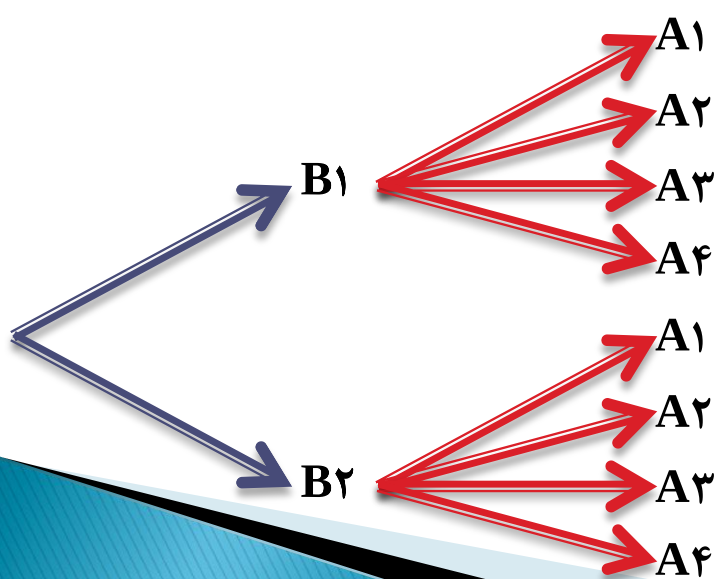
مثال۳: از بین چهار مهندس خاک و دو مهندس آب و سه مهندس زراعت، به چند طریق می توان کمیته ای دو نفره تشکیل داد، به طوری که اعضای کمیته دارای یک نوع تخصص نباشند؟

پاسخ: از روش درختی می توان استفاده کرد.

در این مثال فرض کنید، A={۱،۲،۳،٤} و B={۱،۲} و C={۱،۲،۳} باشد، طبق شرایط مسئله، این کمیته می توان از اعضاء A و B یا Aو C یا B و C باشد.

بنابراین داریم: ۳×۲+ ۳×٤+ ۲×٤ =۲٦

به طور مثال می توان مانند زیر ارتباط درختی بین حالت های مختلف را نشان داد



مثال٤: چند عدد ٤ رقمی وجود دارد؟

پاسخ: از آنجا که رقم صفر نمی تواند در هزارگان باشد، داریم

هزارگان	صدگان	دهگان	یکان
↓	↓	↓	↓
٩	١٠	١٠	١٠

بنابر این $٩ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠ = ٩٠٠٠$

مثال٥: چند عدد ٤ رقمی با ارقام زوج وجود دارد؟

پاسخ: از آنجا ارقام زوج شامل ٨، ٦، ٤، ٢، ٠ هستند

هزارگان	صدگان	دهگان	یکان
↓	↓	↓	↓
٤	٥	٥	٥

بنابراین $٤ \times ٥ \times ٥ \times ٥ = ٥٠٠$

مثال۶: چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار وجود دارد؟

یکان دهکان صدگان

هزارگان

۷ ۸ ۹ ۹

بنابر این ۹×۹×۸×۷=۴۵۳۶

مثال۷: چند عدد ٤ رقمی زوج بدون تکرار وجود دارد؟

پاسخ: دو مجموعه داده می توان داشت:

۱: اعدادی که با رقم صفر زوج می شوند :

یکان	دهگان	صدگان	هزارگان
۱	۷	۸	۹

بنابراین ۸×۸×۷×۱ =۵۰٤

۲: اعدادی که با رقم غیر صفر زوج می شوند :

یکان	دهگان	صدگان	هزارگان
٤	۷	۸	۸

بنابراین ۸×۸×۷×٤ =۱۷۹۲

تمام اعداد چهار رقمی زوج بدون تکرار

۵۰٤+۱۷۹۲ =۲۲۹٦

نکته: مثال های قبلی در مورد اعداد نشان داد که، در اصل ضرب گاهی اوقات انتخابها وابسته به انتخابهای قبلی هستند و گاهی اوقات انتخاب ها، مستقل از انتخابهای قبلی هستند.

به طور مثال: اگر بخواهیم با ارقام ١، ٢، ٣ و ٤ اعداد سه رقمی بدون تکرار بنویسیم، داریم:

٤	٣	٢

= ٤×٣×٢ =٢٤

اما اگر هدف ما نوشتن همه اعداد سه رقمی «با تکرار یا بدون تکرار» باشد، داریم

٤	٤	٤

= ٤×٤×٤ =٦٤

فاکتوریل: یعنی ضرب کردن n در همه اعداد صحیح متوالی قبل از خودش تا یک

$$n! = n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times ۳\times ۲\times ۱$$

نکته:

$$n! = n(n-۱)!$$

مثال: $۵! = ۴\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱ = ۱۲۰$

تبدیل(جایگشت) (P_n)

جابجا کردن n شی **متمایز** را به صورتهای مختلف در کنار هم، تبدیل n شی گویند.

یا به عبارت دیگر هر ترتیبی که بتوان اشیاء یک مجموعه را در کنار یکدیگر قرار داد یک جایگشت می گویند.

نکته: تعداد ترتیب یا جایگشت n شی متمایز در یک صف کنار یکدیگر برابر است با:

$$n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \cdots \times ۳ \times ۲ \times ۱ = n!$$

خانه اول	خانه دوم	خانه سوم		خانه آخر
به n طریق	به n ـ۱ طریق	به n ـ۲ طریق	و . . . و	به (۱) طریق

لذا داریم:

فرمول تبدیل $P_n = n!$

مثال۱: فرض کنید چهار صندلی در کنار هم قرار دارند و چهار نفر می خواهند روی صندلی ها بنشینند. به چند طریق افراد می توانند روی صندلی بنشینند؟

پاسخ: نفر اول ٤ انتخاب دارد، نفر دوم ۳ انتخاب و به همین ترتیب نفر سوم و چهارم به ترتیب ۲ و ۱ انتخاب دارند، لذا در مجموع می توان گفت که به ۲٤ طریق این عمل ممکن است یعنی:

$$P_{٤} = ٤! = ٤ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲٤$$

مثال۲: پنج کتاب مختلف را به چند طریق می توان در یک قفسه چید؟

پاسخ:

$$P_{٥} = ٥! = ٥ \times ٤ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰$$

مثال۳: کشاورزی می خواهد شش تراکتور مختلف را بدون در نظر گرفتن هیچ شرطی در کنار هم پارک کند، به چند صورت این عمل ممکن است؟

پاسخ:

$$P_{٦} = ٦! = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۷۲۰$$

تبدیل های حلقوی

اگر n شی مختلف روی یک حلقه بسته(مثلا روی محیط یک دایره) قرا بگیرند، به اگر که است جهت بدان این .است ممکن تحالت!$(n-۱)$ تمامی n شی مزبور که بر محیط بسته ای چیده شده اند، در یک جهت تغییر مکان دهند، شکل جدیدی پدیدار نخواهد شد، لیکن اگر یکی از n شی را ثابت نگه داریم و n-1 شی باقیمانده را جابجا کنیم شکل های جدیدی فراهم می شود. لذا داریم:

$$P'_n=(n-۱)!$$

مثال: پنج نفر اعضای شورای دانشکده، به چند صورت می توانند دور یک میز بنشینند؟

$$P'_۵=(۵-۱)!=۴!=۲۴$$

مثال: برای ۵ مهندس خاکشناسی و ۵ مهندس آبیاری مطلوب است تعداد حالات نشستن آنها روی ۱۰ صندلی در یک ردیف و حول یک میزگرد با در نظر گرفتن شرایط زیر:

الف- کل حالات نشستن: !۹ برای میزگرد !۱۰ برای یک ردیف

ب- مهندسین خاکشناسی کنار هم بنشینند:

تمامی مهندسین خاکشناسی را یک نفر در نظر گرفته لذا داریم ۱نفر+۵نفر

۱- حالت ردیفی: $5! \times 6!$

۲- حالت میزگرد: $5! \times 5!$

ج- مهندسین خاکشناسی کنار هم و مهندسین آبیاری کنار هم بنشینند:

۱- حالت ردیفی: $5! \times 5! \times 2!$ چونکه دو مجموعه نیز می توانند کنار هم باشند

۲- حالت میزگرد: $5! \times 5! \times 1!$ هر مجموعه می توانند به صورت ردیفی کنار هم قرار گیرند ولی دو مجموعه با هم یک میزگرد را تشکیل می دهند.

ج- مهندسین خاکشناسی و مهندسین آبیاری متناوبا (یک در میان)کنار هم بنشینند:

	S		S		S		S		S

۱- حالت ردیفی: !۵ × !۵ × ۲ چونکه جای دو مجموعه نیز می تواند عوض شود

۲- حالت میزگرد: !۵ × !٤ تعداد حالات ممکن نشستن هر دو گروه، حول میز گرد !٤ است. حال ۵ جا برای نشستن یکی از گروه ها باقی می ماند یعنی !۵ .

تبدیل های با تکرار

اگر از n شی مفروض، r_1 شی از یک نوع، r_2 شی از نوع دیگر و ... و سرانجام r_k شی از نوع دیگری باشند، به طوری که

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$$

آنگاه تعداد تبدیلهای کل از رابطه زیر بدست می آید:

$$P'_n = \frac{n!}{r_1!r_2!..r_k!}$$

مثال۱: **با حروف به کار رفته در کلمه «خاک» بدون توجه به معنی کلمات، چه تعداد کلمات سه حرفی بسازیم:**

پاسخ: چون حروف به کار رفته در کلمه «خاک» متفاوت از هم دیگر هستند، طبق تعریف تبدیل داریم:

$$P_3 = 3! = 6$$

مثال۲: **با حروف به کار رفته در کلمه «دیدم» بدون توجه به معنی کلمات، چه تعداد کلمات چهار حرفی بسازیم:**

پاسخ: چون جا به جا کردن دو حرف «د» تغییری در کلمات به وجود نمی آورد، لذا داریم:

$$P'_{۴} = \frac{۴!}{۲!}$$

مثال۳: **با حروف به کار رفته در کلمه «ساسانیان» بدون توجه به معنی کلمات، چه تعداد کلمات هشت حرفی بسازیم:**

پاسخ: چون حروف «س»، «الف» و «ن» تکراری هستند، لذا داریم

$$P'_{۸} = \frac{۸!}{۲!\,۳!\,۲!}$$

مثال۴: **با ارقام به کار رفته در عدد ۳٤۳۳٤، چند عدد پنج رقمی می توان نوشت:**

پاسخ:

$$P'_{۵} = \frac{۵!}{۳!۲!} = ۱۰$$

مثال۵: **به چند طریق متمایز می توان چهار تراکتور مسی فرگوسن و پنج تراکتور فیات و دو تراکتور جاندیر را در کنار هم چید:**

پاسخ:

$$P'_{۱۱} = \frac{۱۱!}{۴!۵!۲!} = ۶۹۳۰$$

نکته: اگر ۱۱ تراکتور مذکور کاملا متفاوت از همدیگر بودند، مثلا تراکتورهای هم مدل دارای قدرت های متفاوت بودند یا اینکه رنگ آنها کاملا متفاوت از همدیگر باشند یا متمایز از هم بودند:

$$P_{۱۱} = ۱۱! = ۳۹۹۱۶۸۰۰$$

مثال۶: **به چند طریق می توان ۹ نفر کارمند را در یک اتاق ٤ نفره یک اتاق ۳ نفره و یک اتاق ۲ نفره چیدمان کرد؟**

پاسخ:

$$P'_{۹} = \frac{۹!}{۴!۳!۲!} = ۱۲۶۰$$

مثال۷: **به چند طریق می توان ۹ اسباب بازی را بین ٤ کودک تقسیم کرد به شرط آن که کوچکترین کودک ۳ اسباب بازی و به هر یک از کودکان دیگر ۲ اسباب بازی برسد؟**

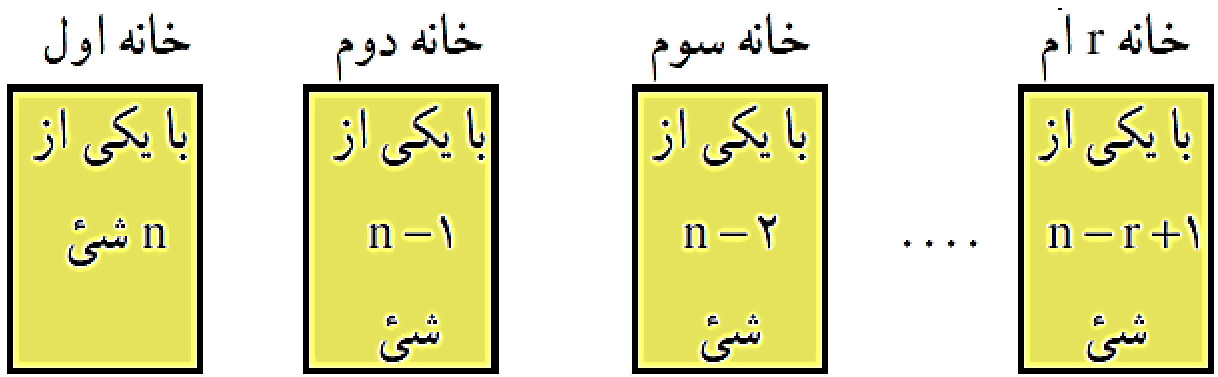
پاسخ:

$$P'_{۹} = \frac{۹!}{۳!۲!۲!۲!} = ۷۵۶۰$$

ترتیب (P_n^r)(بدون تکرار)

جابجا کردن r شیء از n شیء مختلف را (r≤n) ترتیب r شیء از n شیء یا ترتیب n شیء r به r گویند.

سوالی که باید پاسخ داده شود: «n شیء متمایز را به چند صورت مختلف در گروههای r تایی در یک ردیف می توان مرتب کرد؟»



طبق اصل ضرب داریم:

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)$$

اگر رابطه

$$P_n^r = n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times(n-r+۱)$$

یک بار در (n-r)! ضرب و یک بار بر (n-r)! تقسیم کنیم، داریم:

$$P_n^r = \frac{n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times(n-r+۱)\ (n-r)!}{(n-r)!}$$

داریم: $n(n-۱)(n-۲)\times\cdots\times(n-r+۱)\ (n-r)! = n!$

بنابراین:

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

نکته:

قاعده ترتیب:

$$P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

قاعده تبدیل:

$$P_n^n = n!$$

بنابراین

$$\frac{n!}{0!} = n!$$

این رابطه زمانی صادق است که:

$$0! = ۱!$$

نکته: «ترتیب حالت خاصی از تبدیل است که در آن r≤n است. در صورتیکه r=n باشد، اصطلاح تبدیل و در صورتیکه r<n باشد، اصطلاح ترتیب به کار برده می شود»

مثال۱: به چند طریق ۳ دانشجویی که وارد کلاس می شوند می توانند روی ۸ صندلی ردیف اول بنشینند؟

پاسخ: نفر اول به ۸ طریق، نفر دوم به ۷ طریق و نفر سوم به ٦ طریق می توانند جاهای خود را انتخاب کنند، بنابراین طبق اصل ضرب این سه نفر می توانند به ٦×۷×۸ طریق جاهای خود را انتخاب کنند:

$$P_{۸}^{۳} = ۸ \times ۷ \times ۶ = n(n-۱)(n-r+۱)$$

یعنی:

$$P_{۸}^{۳} = \frac{۸!}{(۸-۳)!} = ۸\times۷\times۶=۳۳۶$$

مثال۲: **یک کلاس ١٦ نفری به چند طریق می توانند ٤ به ٤ در کنار هم، عکس بگیرند؟**

پاسخ:

$$P_{۱۶}^{۴} = \frac{۱۶!}{(۱۶-۴)!} = ۴۳۶۸۰$$

مثال۳: **در موسسه، ۱۲ کارمند کار می کنند، به چند صورت می توان از بین آنها یک کمیته ۳ نفره تشکیل که شامل یک رئیس، یک معاون و یک بازرس باشد؟**

پاسخ:

$$P_{۱۲}^{۳} = \frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!} = ۱۳۲۰$$

مثال۴: **پنج کودک به چند صورت مختلف می توانند صف های ۳ نفره بسازند؟**

پاسخ:

$$P_{۵}^{۳} = \frac{۵!}{(۵-۳)!} = ۶۰$$

مثال۵: **اگر تکرار ارقام مجاز نباشد با استفاده از چهار رقم ۲، ۷، ۸ و ۵ چند عدد ۳ رقمی می توان نوشت؟**

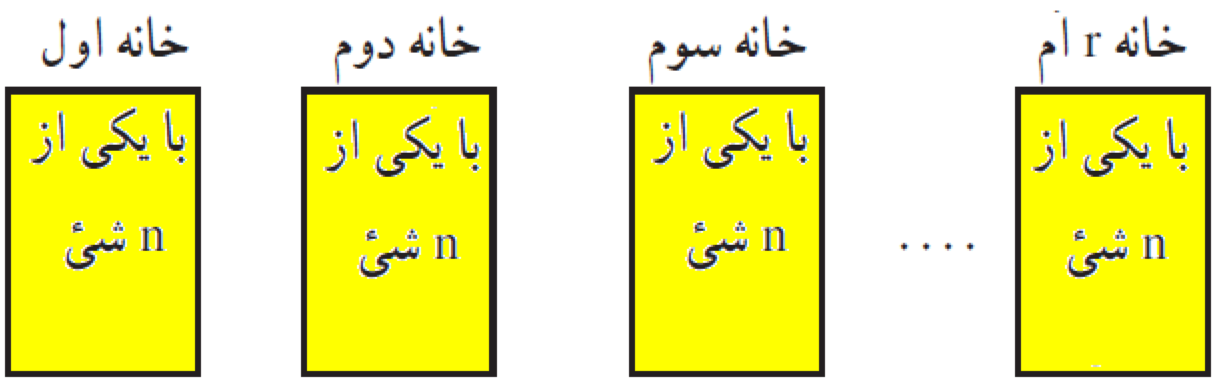
پاسخ:

$$P_{۴}^{۳} = \frac{۴!}{(۴-۳)!} = ۲۴$$

ترتیب های با تکرار

هرگاه تکرار یک یا چند شیء از n شیء در ترتیبهای ساخته شده مجاز باشد، «ترتیب با تکرار» حاصل می شود.

در این حالت می توان برای یافتن تعداد ترتیب ها از روش پر کردن خانه ها می توان استفاده کرد.



چونکه تکرار مجاز است، هر یک از خانه ها را می توان با n شیء پر کرد و طبق اصل ضرب، تعداد حالت های مختلف برابر است با $\mathbf{n \times n \times \ldots \times n}$

$$P'^{r}_{n} = n^{r} = n \times n \times \cdots \times n$$

مثال۱: **با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ٤ چند عدد سه رقمی می توان نوشت ؟**

پاسخ: از آنجا که در هر یک از خانه های یکان، دهگان و صدگان می توان ۱ یا ۲ یا ۳ یا ٤ را قرار داد و بر اساس اصل ضرب می توان ٤ × ٤ × ٤ یا $۴^{۳}$ طریق می توان پر کرد.

$$P'^{۳}_{۴} = ۴^{۳} = ۶۴$$

مثال۲: دو کتاب ریاضی و آمار را به چند صورت می توان به ۳ نفر داد؟

اگر: الف- دادن بیش از یک کتاب به هر نفر مجاز نباشد.

ب- دادن بیش از یک کتاب به هر نفر مجاز باشد.

پاسخ:

الف- ترتیبهای بدون تکرار: مانند شکل زیر می توان استدلال کرد و براساس قانون ضرب ٦=۲×۳ حالت وجود دارد.

کتاب آمار را می توان به یکی از دو نفر باقی مانده داد «به ۲طریق» ← آنگاه ← **کتاب ریاضی را می توان به یکی از سه نفر داد «به ۳طریق»**

$$P_{۳}^{۲} = \frac{۳!}{(۳-۲)!} = ۶$$

ب- ترتیبهای با تکرار: مانند شکل زیر می توان استدلال کرد و براساس قانون ضرب ۹=۳×۳

کتاب آمار را می توان به یکی از سه نفر داد «به ۳طریق»

آنگاه ←

کتاب ریاضی را می توان به یکی از سه نفر داد «به ۳طریق»

$$P'^{۲}_{۳} = ۳^{۲} = ۹$$

مثال۳: با ارقام ۰، ۲، ٤، ٦، ۸ چند عدد دو رقمی می توان نوشت؟

الف– تکرار ارقام مجاز باشد.

ب– تکرار ارقام مجاز نباشد.

پاسخ:

الف– طبق شکل زیر و بر اساس قاعده ضرب داریم: ۲۰=٥×٤

جای یکان

با همه ارقام می توان نوشت
«به ٥طریق»

آنگاه

جای دهگان

با همه ارقام بجز صفر می توان نوشت
«به ٤طریق»

ب- طبق شکل زیر و بر اساس قاعده ضرب داریم:
١٦=٤×٤

جای یکان

با همه ارقام می توان نوشت
«به ٤طریق»

آنگاه

جای دهگان

با همه ارقام بجز صفر می توان نوشت
«به ٤طریق»

نکته: توصیه می شود مسائل تبدیل و ترتیب را با کمک اصل ضرب حل شود تا با سرعت بیشتری به جواب برسیم

مثال۴: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۵ چند عدد دو رقمی زوج می توان نوشت؟

پاسخ: طبق اصل ضرب داریم ۸=۲×٤

جای دهگان		جای یکان
با همه ارقام بجز صفر «به ٤طریق»	← آنگاه	فقط صفر یا ۲ «به ۲طریق»

اگر بخواهیم این مثال را ابتدا با کمک فرمول ترتیبهای با تکرار حل کنیم، خواهیم داشت: $P'^{۲}_{۵} = ۵^{۲} = ۲۵$

حال باید اعدادی را که سمت چپ آنها صفر است و نیز اعدادی که یکاشان فرد است، محاسبه کرده، از کل اعداد کم کنیم:

تعداد اعدادی که سمت چپ آنها صفر است: $۲۵ \times \frac{۱}{۵} = ۵$

تعداد اعدادی که سمت چپ آنها صفر نیست: $۲۰ - ۵ = ۲۰$

تعداد اعدادی که یکای آنها فرد است: $۲۰ \times \frac{۳}{۵} = ۱۲$

تعداد اعدادی که یکای آنها زوج است: $۲۰ - ۱۲ = ۸$

لذا استفاده از روش اصل ضرب ما را با سرعت به جواب می رساند تا فرمولهای ترتیب

ترکیب(بدون تکرار)(C_n^r یا $\binom{n}{r}$)

در هم آمیختن r شیء از n شیء مختلف را ترکیب r شیء از n شیء گویند.

هدف پاسخ به سوال «n شیء متمایز را به چند صورت مختلف در گروههای r تائی (r>n) می توان جا داد؟»

ترکیب، انتخابی از اشیاء را گویند که در آن، ترتیب قرار گرفتن اجزاء در کنار هم مهم نباشد، بلکه با هم بودن اجزاء مد نظر است.

تفاوت ترکیب با ترتیب:

در ترکیب برخلاف ترتیب جابجا شدن اشیاء در هر نمونه r عضوی، نمونه تازه ای فراهم نمی کند. پس ترکیب معادل مفهموم «زیر مجموعه» در ریاضیات است.

$$C_n^r = \frac{۱}{r!} \times P_n^r = \frac{۱}{r!} \times \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

مثال۱: حروف A، B و C را در نظر بگیرید. چه تعداد کلمات دو حرفی بدون تکرار را که می توان با این حروف ساخت؟

پاسخ: این یک مسئله به صورت ترتیب است، پس ما داریم:

ترتیبهای دو شیء از سه شیء AB-AC-BC-BA-CA-CB

بنابراین:

$$P_{۳}^{۲}=\frac{۳!}{(۳-۲)!}=۶$$

در این مثال، بین AB و BA یا بین AC و CA یا بین BC و CB تفاوتی در نظر گرفته نشده است.

حال فرض کنید، هر یک از این حروف نماینده یک رنگ باشند «آبی، قرمز و سیاه» آنگاه بین ترکیب رنگ های AB و BA یا بین AC و CA یا بین BC و CB تفاوتی وجود نخواهد داشت(ترکیب های دو عضوی از یک مجموعه سه عضوی یعنی ترکیب های AB، AC و BC).

در حالت ترکیب، تعداد ترکیبها همواره به اندازه $\frac{1}{r!}$ تعداد ترتیب ها خواهد بود.

مثال۲: **دو کتاب A، B را به دو صورت AB و BA در کتابخانه می توان قرار داد.**

اما؛ این دو کتاب تنها به یک طریق می توان هدیه داد، زیرا ترتیب قرار گرفتن کتاب در اینجا مهم نیست.

مثال۳: به چند طریق می توان از بین ۱۰ مزرعه، به طور تصادفی دو مزرعه را به عنوان یک نمونه، انتخاب کرد؟

پاسخ:

$$C_{۱۰}^{۲} = \frac{۱۰!}{۲!(۱۰-۲)!} = ۴۵$$

مثال۴: استاد درس آمار و احتمالات در امتحان آخر ترم ۲۰ سوال به دانشجویان داده است، که آنها به طور دلخواه به ۱۸ سوال پاسخ دهند. دانشجویان به چند طریق می توانند سوالات خود را انتخاب کنند؟

پاسخ:

$$C_{۲۰}^{۱۸} = \frac{۲۰!}{۱۸!(۲۰-۱۸)!} = ۱۹۰$$

مثال۵: تعداد مجموعه های سه عضوی را که می توان از مجموعه {۲، A، الف، ⊙، 📋، D} ساخت، تعیین کنید؟

پاسخ:

$$C_{۶}^{۳} = \frac{۶!}{۳!(۶-۳)!} = ۲۰$$

توضیح: ترتیب قرار گرفتن عضوها در یک مجموعه اهمیت ندارد.

ترکیب های با تکرار

اگر در n شیء مورد نظر، برخی از اشیاء مثل هم و یکسان باشند و بخواهیم ترکیبهایی r تایی بسازیم از ترکیبهای با تکرار استفاده می کنیم.
مانند مجموعه $\{A, A, B, N, H\}$ که عضو A تکرار شده بنابراین AA می تواند یک ترکیب دو حرفی با تکرار از مجموعه حاضر باشد.

$$C'^{r}_{n+r-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

توجیه این موضوع بدین صورت است که اگر n ظرف داشته باشیم که در کنار هم قرار گرفته اند و قرار دادن r چیز در آنها مورد نظر باشد و گذاشتن بیش از یک چیز در هر ظرف نیز مجاز باشد از ترکیب های با تکرار استفاده می شود.

مثال۱: **یک مربی فوتبال می خواهد از بین ۱۰ بازیکن یک دروازه بان و یک کاپیتان تعیین کند. او این کار را به چند طریق می تواند انجام دهد؟**

الف- اگر قرار باشد دروازه بان کسی غیر از کاپیتان تیم باشد.

ب- اگر دروازه بان در عین حال بتواند کاپیتان هم باشد.

پاسخ:

الف- ترکیب بدون تکرار

$$C_{۱۰}^{۲}=\frac{۱۰!}{۲!(۱۰-۲)!}=۴۵$$

ب- ترکیب با تکرار

$$C'^{۲}_{۱۰+۲-۱}=\frac{(۱۰+۲-۱)!}{۲!(۱۰-۱)!}=۵۵$$

مثال۲: روزهای تولد یک خانواده ۱۰ نفری به چند صورت مختلف می تواند در هفت روز هفته جایگزین شود؟

پاسخ: می توان فرض کرد که هفت روز هفته در حکم ۷ ظرف باشد که ۱۰ چیز را باید در آنها جای داد و بیش از یک چیز هم در یک ظرف مجاز باشد، بنابراین مسئله، ترکیب با تکرار خواهد بود:

$$C'^{۱۰}_{۷+۱۰-۱} = \frac{(۱۰ + ۷ - ۱)!}{۷!\,(۷ - ۱)!} = ۸۰۰۸$$

مثال۳: معادله $x+y=4$ چند دسته جواب صحیح غیر منفی دارد؟

پاسخ: می توان فرض کرد که چهار چیز غیر متمایز را به چند صورت مختلف می توان در دو ظرف x و y قرار داد.

$$C'^{۴}_{۲+۴-۱} = \frac{(۲ + ۴ - ۱)!}{۴!\,(۲ - ۱)!} = ۵$$

مثال۴: بسط دو جمله ای $(a+b)^{۶}$ منجر به چند جمله می شود؟

پاسخ: می توان فرض کرد که شش چیز غیر متمایز را به چند صورت مختلف می توان در دو ظرف a و b قرار داد.

$$C'^{۶}_{۲+۶-۱} = \frac{(۲+۶-۱)!}{۶!\,(۲-۱)!} = ۷$$

چگونه موارد ترتیب و ترکیب را از هم تمایز دهیم

به طور کلی، ترتیب در حل مسائلی بکار می رود که در آنها، ترتیب رخ دادن پیشامدها مهم باشد. در صورتیکه ترتیب رخ دادن پیشامدها مورد نظر نباشد از قاعده ترکیب استفاده می کنیم

مثال۱: دو مهره داریم یکی سیاه و دیگری سفید است. این دو مهره را به چند صورت مختلف در سه ظرف A، B و C می توان قرار داد؟

الف- اگر گذاشتن بیش از یک مهره در هر ظرف مجاز نباشد.

ب- اگر گذاشتن بیش از یک مهره در هر ظرف مجاز باشد.

پاسخ: بدلیل تفاوت در رنگ و در نتیجه متمایز بودن مهره ها، از قاعده ترتیب استفاده می شود

الف- ترتیب بدون تکرار

$$P_{۳}^{۲} = \frac{۳!}{(۳-۲)!} = ۶$$

ب- ترتیب با تکرار

$$P'^{۲}_{۳} = ۳^{۲} = ۹$$

مثال۲: دو مهره غیر متمایز سفید را به چند صورت مختلف در سه ظرف می توان قرار داد؟

الف- اگر گذاشتن بیش از یک مهره در هر ظرف مجاز نباشد.

ب- اگر گذاشتن بیش از یک مهره در هر ظرف مجاز باشد.

پاسخ: بدلیل غیر متمایز بودن مهره ها از قاعده ترکیب استفاده می کنیم

الف- ترکیب بدون تکرار

$$C_{۳}^{۲} = \frac{۳!}{۲!\,(۳-۲)!} = ۳$$

ب- ترکیب با تکرار

$$C'^{۲}_{۳+۲-۱} = \frac{(۳+۲-۱)!}{۲!(۳-۱)!} = ۶$$